Königliches Gymnasium zu Marienburg.

Zu der

Freitag, den 7. April 1876

stattfindenden

öffentlichen Prüfung aller Klassen

ladet

im Namen des Lehrer-Kollegiums ein

Dr. Friedrich Strehlke,

Gymnasial-Direktor.

Inhalt:

Ueber die Oscillation zweier einander nach dem Newton'schen Gesetze abstossenden Punkte, welche sich auf der Peripherie eines Kreises berühren — vom Gymnasiallehrer Dr. Schulze.

DANZIG.

1876. Progr. No. 17. 6

Druck von Edwin Groening.

1876.

Ueber die Oscillation zweier nach dem Newton'schen Gesetze einander abstossenden Punkte, welche auf der Peripherie eines Kreises zu bleiben gezwungen sind.

§ 1. Die Kraft zwischen den Masseneinheiten in der Einheit der Entfernung sei k', so ist in der Entfernung r die Kraft F zwischen den Massen m und m'

$$F = \frac{k' m m'}{r^2} = \frac{k}{r^2} \quad (k = k' m m').$$

Der Mittelpunkt des Kreises sei der Coordinatenanfang, die Ebene des Kreises die $x\,y$ Ebene, so ist

1. $$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$$

und die Kraftcomponenten an m und m'

$$X = \frac{k}{r^2} \cdot \frac{x - x'}{r} \qquad Y = \frac{k}{r^2} \cdot \frac{y - y'}{r}$$

$$X' = -\frac{k}{r^2} \cdot \frac{x - x'}{r} \qquad Y' = -\frac{k}{r^2} \cdot \frac{y - y'}{r}$$

Ausser diesen Kräften unterliegen die Punkte m und m' noch den aus dem Widerstande der Curve herrührenden Normalkräften N und N', die einander gleich sind. Die Componenten dieser Kräfte sind, wenn ϱ der Radius des Kreises

$$N_x = N\frac{x}{\varrho} \qquad N_y = N\frac{y}{\varrho}$$

$$N_{x'} = N\frac{x'}{\varrho} \qquad N_{y'} = N\frac{y'}{\varrho}.$$

Es sind also, wenn man $\frac{N}{\varrho} = 2\,\lambda$ setzt, die Componenten der an m und m' wirkenden Kräfte

$$X + 2\,\lambda\,x, \qquad Y + 2\,\lambda\,y, \qquad X' + 2\,\lambda\,x', \qquad Y' + 2\,\lambda\,y'.$$

Der dynamische Ausdruck derjenigen Kraft aber, welche allein einem Punkte m dieselbe Bewegung ertheilen würde, wie alle Kräfte an ihm zusammen, ist m $\frac{d^2 s}{d t^2}$ und die Componenten sind m $\frac{d^2 x}{d t^2}$, m $\frac{d^2 y}{d t^2}$. Es gelten also folgende Gleichungen

2.
$$\begin{aligned} X + 2\lambda x &= m \frac{d^2 x}{d t^2} \\ Y + 2\lambda y &= m \frac{d^2 y}{d t^2} \\ X' + 2\lambda x' &= m' \frac{d^2 x'}{d t^2} \\ Y' + 2\lambda y' &= m' \frac{d^2 y'}{d t^2}. \end{aligned}$$

Dieselben Gleichungen ergeben sich aus dem d'Alembertschen Prinzip. Die Coordinaten von m und m' müssen den Gleichungen

3. $$L = x^2 + y^2 - \varrho^2 = 0 \qquad \text{und} \qquad M = x'^2 + y'^2 - \varrho^2 = 0$$

genügen; es ist also

4.
$$\begin{aligned} X - m \frac{d^2 x}{dt^2} + 2\lambda x &= 0 \\ Y - m \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\lambda y &= 0 \\ X' - m' \frac{d^2 x'}{dt^2} + 2\nu x' &= 0 \\ Y' - m' \frac{d^2 y'}{dt^2} + 2\nu y' &= 0 \end{aligned}$$

§ 2. Die Gleichung der lebendigen Kraft. Multiplicirt man die Gleichungen 2 der Reihe nach mit dx, dy, dx', dy' und addirt, so ist unter Berücksichtigung, dass nach § 1, 3

$$2\lambda x\, dx + 2\lambda y\, dy = 0 \text{ und}$$
$$2\nu x'\, dx' + 2\nu y'\, dy' = 0$$

1. $$X\, dx + Y\, dy + X'\, dx' + Y'\, dy' = m \left[\frac{d^2 x}{d t^2} dx + \frac{d^2 x}{d t^2} dy\right] + m' \left[\frac{d^2 x'}{d t^2} dx' + \frac{d^2 y'}{d t^2} dy'\right]$$

Beide Seiten dieser Gleichung enthalten ein vollständiges Differential, denn die Grössen X, Y, X', Y' sind die partiellen Differentialquotienten des Potentials

$$V = -\frac{k}{r}.$$

Die rechte Seite aber ist das vollständige Differential des Ausdrucks

$$\tfrac{1}{2} m \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] + \tfrac{1}{2} m' \left[\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt}\right)^2\right] = \tfrac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{2} m' \left(\frac{ds'}{dt}\right)^2$$

Durch Integration der Gleichung 1 folgt also

2. $$m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + m'\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 = -\frac{2k}{r} + C \text{ oder}$$

3. $$m v^2 + m' v'^2 = -\frac{2k}{r} + C.$$

Sind v_0 und v_0' die Anfangsgeschwindigkeiten und r_0 die Anfangsentfernung der Punkte, so ist auch

$$m v_0^2 + m' v_0'^2 = -\frac{2k}{r_0} + C.$$

Subtrahirt man diese Gleichung von 3, so ist

4. $$\begin{cases} m v^2 + m' v'^2 - (m v_0^2 + m' v_0'^2) = 2k\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) \text{ oder} \\ m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + m'\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 - (m v_0^2 + m' v_0'^2) = 2k\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) \end{cases}$$

d. h. die Summe der lebendigen Kräfte ist immer dieselbe, wenn die Punkte dieselbe Entfernung haben.

Die Gleichung 4 giebt eine Relation zwischen den Geschwindigkeiten und den Cordinaten.

§ 3. Das Princip der Flächen. Wenn man die Gleichungen 2 des § 1 der Reihe nach mit y, x, y', x' multiplicirt, so kann man folgende Gleichungen bilden

1. $$\begin{cases} x Y - y X = m\left[x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2}\right] \\ x' Y' - y' X' = m'\left[x' \frac{d^2 y'}{dt^2} - y' \frac{d^2 x'}{dt^2}\right]. \end{cases}$$

Durch Addition derselben folgt

2. $$\Sigma (x Y - y X) = m\left[x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2}\right] + m'\left[x' \frac{d^2 y'}{dt^2} - y' \frac{d^2 x'}{dt^2}\right]$$

Nun ist

$$x Y - y X = \frac{k}{r^3} \cdot [x (y - y') - y (x - x')]$$

$$x' Y' - y' X' = -\frac{k}{r^3} \cdot [x' (y - y') - y' (x - x')]$$

folglich

$$\Sigma (x Y - y X) = \frac{k}{r^3} [(x - x)' . (y - y') - (y - y') (x - x')] = 0$$

Die linke Seite von 2 ist also = 0, mithin auch die rechte

3. $$\Sigma\, m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2}\right) = 0$$

Die linke Seite von 3 wird wieder ein vollständiges Differential, wenn man mit dt multiplicirt. Denn es ist nach t differenzirt

$$\frac{d \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}\right) dt}{dt} = \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2}\right).$$

Integrirt man also die Gleichung 3, so folgt

4. $$\Sigma\, m \frac{x\, dy - y\, dx}{dt} = m \frac{x\, dy - y\, dx}{dt} + m' \frac{y'\, dy' - y'\, dx'}{dt} = C.$$

d. h. multiplicirt man die von jedem Punkte beschriebene Fläche mit der Masse des Punktes, so ist die Summe dieser Producte proportional der erforderlichen Zeit und in gleichen Zeiten gleich gross.

§ 4. Transformation der Gleichungen in Polarcoordinaten. Durch Einführung von Polarcoordinaten werden die Gleichungen 4 der Paragraphen 2 und 3 bequemer. Die Lage der Punkte m und m' sei bestimmt zur Zeit

$t = 0$ durch die Winkel α u. α',

$t = t$ durch die Winkel Θ u. Θ'.

Es ist nun

$$x = \varrho \cos \Theta \qquad dx = - \varrho \sin \Theta\, d\Theta$$
$$y = \varrho . \sin \Theta \qquad dy = \varrho . \cos \Theta\, d\Theta$$

folglich

$$m \frac{x\, dy - y\, dx}{dt} = m\, \varrho^2 \frac{d\Theta}{dt}$$

und

$$m' \frac{x'\, dy' - y'\, dx'}{dt} = m'\, \varrho^2 \frac{d\Theta'}{dt}$$

folglich nach § 3, 4

$$m\, \varrho^2 \frac{d\Theta}{dt} + m'\, \varrho^2 \frac{d\Theta'}{dt} = C.$$

Die Bedeutung der Constanten C ergiebt sich; wenn an Stelle der Geschwindigkeit $\varrho \frac{d\Theta}{dt}$ die Anfangsgeschwindigkeit $\varrho\, \omega$ gesetzt wird (ω ist die Anfangswinkelgeschwindigkeit). Es ist dann

$$m\, \varrho^2\, \omega + m'\, \varrho^2\, \omega' = C \text{ und}$$
$$m\, \varrho^2 \frac{d\Theta}{dt} + m'\, \varrho^2 \frac{d\Theta'}{dt} = m\, \varrho^2\, \omega + m'\, \varrho^2\, \omega' \text{ oder}$$

1. $$m \frac{d\Theta}{dt} + m' \frac{d\Theta'}{dt} = c$$

worin $c = m\omega + m'\omega'$.

Durch Integration der Gleichung 1 ergiebt sich die zwischen Θ, Θ' und t bestehende wichtige Relation

2. $$m\,\Theta + m'\,\Theta' = ct + \beta$$

Die Bedeutung der Constanten β ergiebt sich, wenn $t = 0$, $\Theta = \alpha$, $\Theta' = \alpha'$ gesetzt wird

$$m\,\alpha + m'\,\alpha' = \beta$$

Man hat also nun folgende Gleichungen

3. $$\left\{\begin{aligned} \Theta &= -\frac{m'}{m}\,\Theta' + \frac{c}{m}\,t + \frac{\beta}{m} \\ \Theta' &= -\frac{m}{m'}\,\Theta + \frac{c}{m'}\,t + \frac{\beta}{m'} \\ \Theta' - \Theta &= -\frac{m + m'}{m'}\,\Theta + \frac{c}{m'}\,t + \frac{\beta}{m'} \\ &= -\frac{M}{m'}\,\Theta + \frac{c}{m'}\,t + \frac{\beta}{m'}, \text{ worin } M = m + m'. \end{aligned}\right.$$

Es mögen nun auch in die Gleichung der lebendigen Kraft Polarcoordinaten eingeführt und $\alpha < \alpha' < \pi$ angenommen werden.

Die von den Punkten in der Zeit t (d. h. von $t = 0$ bis $t = t$) durchlaufenen Bogen sind

$$s = \varrho\,.(\Theta - \alpha) \text{ und } s' = \varrho\,(\Theta' - \alpha'),$$

folglich sind die Geschwindigkeiten

4. $$\frac{d\,s}{d\,t} = \varrho\,\frac{d\,\Theta}{d\,t} \text{ und } \frac{d\,s'}{d\,t} = \varrho\,\frac{d\,\Theta'}{d\,t}$$

und die Anfangsgeschwindigkeiten

$$v_0 = \varrho\,.\,\omega \qquad \text{und} \qquad v_0' = \varrho\,.\,\omega'$$

Nun ist
$$\begin{aligned} x &= \varrho\,.\cos\Theta & y &= \varrho\,.\sin\Theta \\ x' &= \varrho\,.\cos\Theta' & y' &= \varrho\,.\sin\Theta', \end{aligned}$$

mithin

$$\begin{aligned} (x - x')^2 &= \varrho^2.(\cos^2\Theta - 2\cos\Theta\cos\Theta' + \cos^2\Theta') \\ (y - y')^2 &= \varrho^2.(\sin^2\Theta - 2\sin\Theta\sin\Theta' + \sin^2\Theta') \\ r^2 &= \varrho^2\,[2 - 2\cos(\Theta' - \Theta)] \\ r &= \varrho\sqrt{2\,[1 - \cos(\Theta' - \Theta)]} \end{aligned}$$

5. $$r = \varrho\sqrt{4.\,\sin^2\frac{\Theta' - \Theta}{2}} = 2\,\varrho\,.\sin\frac{\Theta' - \Theta}{2}$$

Analog ist $r_0 = 2\,\varrho \sin \frac{\alpha' - \alpha}{2}$.

Setzt man diese Werthe 4 und 5 in die Gleichung (§ 2, 4) der lebendigen Kraft, so folgt

$$m\,\varrho^2 \left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 + m'\,\varrho^2 \left(\frac{d\Theta'}{dt}\right)^2 - (m\,\varrho^2\,\omega^2 + m'\,\varrho^2\,\omega'^2) = \frac{k}{\varrho} \cdot \left\{ \frac{1}{\sin \frac{\alpha' - \alpha}{2}} - \frac{1}{\sin \frac{\Theta' - \Theta}{2}} \right\}$$

oder

6. $$m \left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 + m' \left(\frac{d\Theta'}{dt}\right)^2 - (m\,\omega^2 + m'\,\omega'^2) = \frac{k}{\varrho^3} \left\{ \frac{1}{\sin \frac{\alpha' - \alpha}{2}} - \frac{1}{\sin \frac{\Theta' - \Theta}{2}} \right\}$$

§ 5. Transformation der Gleichung der lebendigen Kraft. Mit Hülfe der Gleichungen

$$m \frac{d\Theta}{dt} + m' \frac{d\Theta'}{dt} = c \text{ und}$$

$$\Theta' - \Theta = - \frac{M}{m'}\,\Theta + \frac{c}{m'}\,t + \frac{\beta}{m'}$$

kann man $\frac{d\,\Theta'}{d\,t}$ und Θ' aus der Gleichung 6 des vorigen Paragraphen eliminiren. Es ergiebt sich

$$\frac{d\Theta'}{dt} = - \frac{m}{m'} \frac{d\Theta}{dt} + \frac{c}{m'}$$

1. $$m' \left(\frac{d\Theta'}{dt}\right)^2 = \frac{m^2}{m'^2} \left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 - 2\,c\,\frac{m}{m'} \frac{d\Theta}{dt} + \frac{c^2}{m'}.$$

Die Gleichung 6 des vorigen Paragraphen geht über in

2. $$m \left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 + \frac{m^2}{m'} \left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 - 2\,c\,\frac{m}{m'} \frac{d\Theta}{dt} + \frac{c^2}{m'} - (m\,\omega^2 + m'\,\omega'^2)$$
$$= \frac{k}{\varrho^3} \cdot \left\{ \frac{1}{\sin \frac{\alpha' - \alpha}{2}} - \frac{1}{\sin \frac{\Theta' - \Theta}{2}} \right\}$$

Die linke Seite der vorstehenden Gleichung ist aber

$$\frac{m\,M}{m'} \left[\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 - 2\,\frac{c}{M}\,\frac{d\Theta}{dt}\right] + \frac{c^2}{m'} - (m\,\omega^2 + m'\,\omega'^2)$$
$$= \frac{m\,M}{m'} \left[\left(\frac{d\Theta}{dt}\right) - \frac{c}{M}\right]^2 - \frac{c^2}{m'} \left(\frac{m}{M} - 1\right) - (m\,\omega^2 + m'\,\omega'^2)$$
$$= \frac{m\,M}{m'} \left[\frac{d\Theta}{dt} - \frac{c}{M}\right]^2 + \frac{c^2}{M} - (m\,\omega^2 + m'\,\omega'^2)$$

Die Summe der beiden letzten Glieder ist aber

$$\frac{1}{M} \cdot \left\{ \begin{array}{l} m^2\,\omega^2 + 2\,m\,m'\,\omega\,\omega' + m'^2\,\omega'^2 \\ - m^2\,\omega^2 - m\,m'\,\omega'^2 - m\,m'\,\omega^2 - m'^2\,\omega'^2 \end{array} \right\}$$
$$= \frac{1}{M} \cdot [2\,m\,m'\,\omega\,\omega' - m\,m'\,\omega'^2 - m\,m'\,\omega^2]$$
$$= - \frac{m\,m'}{M} \cdot (\omega' - \omega)^2$$

Bringt man dieses Glied auf die rechte Seite und dividirt sodann die Gleichung durch $\frac{m M}{m'}$ so ist

$$\left(\frac{d\Theta}{dt} - \frac{c}{M}\right)^2 = \frac{m'^2}{M^2} (\omega' - \omega)^2 + \frac{m'}{m M} \cdot \frac{k}{\varrho^3} \left\{ \frac{1}{\sin \frac{\alpha' - \alpha}{2}} - \frac{1}{\sin \frac{\Theta' - \Theta}{2}} \right\}$$

Zieht man auf beiden Seiten die Quadratwurzel aus und schafft das Glied $\frac{c}{M}$ auf die andere Seite, so ergiebt sich

3. $$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{c}{M} \pm \sqrt{\frac{m'^2}{M^2} (\omega' - \omega)^2 + \frac{m'}{m M} \cdot \frac{k}{\varrho^3} \cdot \left\{ \frac{1}{\sin \frac{\alpha' - \alpha}{2}} - \frac{1}{\sin \frac{\Theta' - \Theta}{2}} \right\}}$$

Wollte man rechts für $\Theta' - \Theta$ den § 4 gefundenen Werth $\Theta' - \Theta = -\frac{M}{m'} \Theta + \frac{c}{m'} t + \frac{\beta}{m'}$ einsetzen, so enthielte die rechte Seite noch t explicite; nur für $c = 0$ würde t herausfallen. Es mag daher das Argument

4. $$\psi = \Theta' - \Theta$$

eingeführt werden; es sei $\psi_0 = \alpha' - \alpha$.

Dann ist

5. $$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\Theta'}{dt} - \frac{d\Theta}{dt}$$

und da $\psi = \Theta' - \Theta = -\frac{M}{m'} \Theta + \frac{c}{m'} t + \frac{\beta}{m'}$, so folgt

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{M}{m'} \frac{d\Theta}{dt} + \frac{c}{m'},$$

und aus der Gleichung 3 wird

6. $$\frac{d\psi}{dt} = \pm \frac{M}{m'} \sqrt{\frac{m'^2}{M^2} (\omega' - \omega)^2 + \frac{m'}{m M} \cdot \frac{k}{\varrho^3} \left(\frac{1}{\sin \frac{1}{2} \varrho_0} - \frac{1}{\sin \frac{1}{2} \psi} \right)}$$

$$= \pm \sqrt{(\omega' - \omega)^2 + \frac{M}{m m'} \cdot \frac{k}{\varrho^3} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} \psi - \sin \frac{1}{2} \psi_0}{\sin \frac{1}{2} \psi_0 \quad \sin \frac{1}{2} \psi}}$$

Bezeichnet man das Radicat mit R, so folgt

7. $$t = \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{R}}.$$

Dieses Integral führt, wie man sehen wird auf ein elliptisches. Die Umkehrung würde ergeben $\psi = \Theta' - \Theta = f(t)$, und mit Hülfe der Gleichung $\Theta' - \Theta = -\frac{M}{m'} \Theta + \frac{c}{m'} t + \frac{\beta}{m'}$ könnte man dann für jedes t auch Θ und Θ' bestimmen.

Cap. II.

$$m\,\omega + m'\,\omega' = c = 0.$$

§ 6. $\frac{d\,\Theta}{d\,t'}\,\frac{d\,\Theta'}{d\,t}$ ein Maximum, Minimum, Null. Es soll nun zunächst der Fall untersucht werden, dass $m\,\omega + m'\,\omega' = c = 0$ ist. Dies tritt ein, wenn

1. $\omega = \omega' = 0$, also die Anfangsgeschwindigkeiten einzeln gleich Null, oder
2. $m\,\omega = -\,m'\,\omega$ oder

$\omega : \omega' = -\,m' : m$, also die Anfangsgeschwindigkeiten entgegengesetzt sind, und sich umgekehrt verhalten wie die Massen der Punkte. Wie sich sogleich zeigen wird (vgl. Gleichung 3), nehmen beide Punkte gleichzeitig die Geschwindigkeit Null an. Die Untersuchung der Bewegung würde also mit der unter der ersten Bedingung im Wesentlichen übereinstimmen.

Es mag nun noch vorausgesetzt werden, dass $\alpha < \alpha' < \pi$ ist. Von der Anfangslage ausgehend hat nun Punkt m zuerst eine negative, m' eine positive Richtung; die absoluten Geschwindigkeiten beider Punkte nehmen zu bis $\Theta' - \Theta = \pi$ ist. Bestimmt man nun, dass für diesen Zustand $\Theta' = \pi\ \Theta = 0$ sein soll, so ergiebt sich aus den Gleichungen

$$1.\quad \left\{\begin{aligned} \Theta &= -\frac{m'}{m}\,\Theta' + \frac{\beta}{m} \qquad (\text{denn } c = 0)\\ \Theta' &= -\frac{m}{m'}\,\Theta + \frac{\beta}{m'}\\ \Theta' - \Theta &= -\frac{M}{m'}\,\Theta + \frac{\beta}{m'} \end{aligned}\right.$$

das Verhältniss der Winkel α und $\pi - \alpha'$. Es ist

$$2.\quad \left\{\begin{aligned} \pi &= \frac{\beta}{m'} = \frac{m\,\alpha + m'\,\alpha'}{m'} \text{ oder}\\ m'\,(\pi - \alpha') &= m\,\alpha \end{aligned}\right.$$

Hieraus folgt

$$2^*\quad \left\{\begin{aligned} \alpha &= \pi - \frac{m}{m'}\,\alpha\\ \alpha' - \alpha &= \pi - \frac{M}{m'}\,\alpha\\ \tfrac{1}{2}\,(\alpha' - \alpha) &= \tfrac{1}{2}\,\pi - \tfrac{1}{2}\,\frac{M}{m'}\,\alpha \end{aligned}\right.$$

Aus dem Prinzip der Flächen folgt nun zunächst, da $c = 0$,

$$3.\quad m\,\frac{d\Theta}{dt} + m'\,\frac{d\Theta'}{dt} = 0$$

d. h. beide Punkte haben immer entgegengesetzte Geschwindigkeiten und gleichzeitig die Geschwindigkeit Null; ferner hat m ein Maximum der Geschwindigkeit, wenn m' ein Minimum hat und umgekehrt.

Die Gleichung 3 des § 5 geht nun für c = 0, $\omega = \omega' = 0$ über in

4. $$\frac{d\Theta}{dt} = \pm \sqrt{\frac{m'}{m\,M} \cdot \frac{k}{\varrho^3} \left[\frac{1}{\sin\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)} - \frac{1}{\sin\frac{1}{2}(\Theta' - \Theta)}\right.} .$$

Zur Abkürzung sei nun

$$\frac{M}{m'} = b \text{ und } \sqrt{\frac{m'}{m\,M} \cdot \frac{k}{\varrho^3}} = C$$

so ist nach 2*

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha) = \sin(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}b\,\alpha) = \cos\tfrac{1}{2}b\,\alpha \text{ und}$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(\Theta' - \Theta) = \sin\tfrac{1}{2}(-b\,\Theta + \pi) = \cos\tfrac{1}{2}b\,\Theta$$

und

5. $$\frac{d\Theta}{dt} = \pm C \sqrt{\frac{1}{\cos\frac{1}{2}b\,\alpha} - \frac{1}{\cos\frac{1}{2}b\,\Theta}} = \pm C \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}b\,\Theta - \cos\frac{1}{2}b\,\alpha}{\cos\frac{1}{2}b\,\alpha \,.\, \cos\frac{1}{2}b\,\Theta}}$$

In dieser Gleichung ist $\frac{1}{2}b\,\alpha < \frac{1}{2}\pi$, denn

$$\tfrac{1}{2}b\,\alpha = \tfrac{1}{2}\frac{M}{m'}\alpha = \tfrac{1}{2}\frac{m\,\alpha + m'\,\alpha}{m'};$$

nach der Annahme ist $\alpha < \alpha'$, folglich

$$\tfrac{1}{2}\frac{m\,\alpha + m'\,\alpha}{m'} < \tfrac{1}{2}\frac{m\,\alpha + m'\,\alpha'}{m'} = \tfrac{1}{2}\pi \qquad \text{(nach Gl. 2).}$$

Es ist daher $\cos\frac{1}{2}b\,\alpha$ ein positiver echter Bruch. Noch mag bemerkt werden, dass aus der Gleichung 5 ersichtlich ist, dass die Geschwindigkeit $\frac{d\Theta}{dt}$ eine stetige Function von Θ ist.

Aus der Gleichung 5 ergeben sich nun leicht die Bedingungen, unter welchen $\frac{d\Theta}{dt}$ ein Maximum, ein Minimum oder Null ist.

Quadrirt man die Gleichung 5, so ist

$$\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 = C^2 \cdot \frac{1}{\cos\frac{1}{2}b\,\alpha} - C^2 \frac{1}{\cos\frac{1}{2}b\,\Theta},$$

und durch Differentiation nach t erhält man daraus

$$2\frac{d\Theta}{dt} \cdot \frac{d^2\Theta}{dt^2} = \tfrac{1}{2}b\,C^2 \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}b\,\Theta} \cdot \sin\tfrac{1}{2}b\,\Theta \cdot \frac{d\Theta}{dt} \text{ oder}$$

$$2\frac{d^2\Theta}{dt^2} = \tfrac{1}{2}b\,C^2 \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}b\,\Theta}{\cos^2\frac{1}{2}b\,\Theta}.$$

Damit also $\frac{d\Theta}{dt}$ ein Maximum oder Minimum wird, muss die rechte Seite gleich Null sein, also

$$\sin \tfrac{1}{2} b \Theta = 0 \text{ oder}$$
$$\Theta = 0 \text{ oder } \Theta = 2 n \pi .$$

Der letztere Werth ist ohne Bedeutung, denn Θ kann nicht grösser als α werden, wie sich zeigen wird. Die entsprechende Lage des anderen Punktes folgt an's

$$\Theta' = -\frac{m}{m'}\Theta + \frac{\beta}{m'} = -\frac{m}{m'}\Theta + \pi,$$

wenn darin $\Theta = 0$ gesetzt wird; es ist dann

$$\Theta' = \pi .$$

Es bezeichne W das Maximum, w das Minimum der Geschwindigkeit von m, so ist

$$W = + C . \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{1}{2} b \alpha}{\cos \frac{1}{2} b \alpha}}$$

$$w = - C . \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{1}{2} b \alpha}{\cos \frac{1}{2} b \alpha}}$$

und da in der Gleichung

$$\frac{d\Theta}{dt} = \pm C \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2} b \Theta - \cos \frac{1}{2} b \alpha}{\cos \frac{1}{2} b \alpha \quad \cos \frac{1}{2} b \Theta}}$$

das Vorzeichen der Wurzel mit dem von $d\Theta$ übereinstimmen muss (C ist eine positive Grösse), so folgt, dass das Maximum bei wachsendem Θ, das Minimum dagegen bei abnehmendem Θ stattfindet.

Das Maximum W' und das Minimum w' für den Punkt m' folgt aus den Gleichungen

$$m W + m' w' = 0 \text{ und}$$
$$m w + m' W' = 0,$$

nämlich

$$W' = + \frac{m}{m'} C \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{1}{2} b \alpha}{\cos \frac{1}{2} b \alpha}}$$

$$w' = - \frac{m}{m'} C \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{1}{2} b \alpha}{\cos \frac{1}{2} b \alpha}}$$

Es ist nun die Frage, wann $\frac{d\Theta}{dt} = 0$ wird. Es ist

$$\frac{d\Theta}{dt} = \pm C \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2} b \Theta - \cos \frac{1}{2} b \alpha}{\cos \frac{1}{2} b \alpha}} = 0, \text{ also muss}$$

$$\cos \tfrac{1}{2}\, b\, \Theta = \cos \tfrac{1}{2}\, b\, \alpha$$
$$\tfrac{1}{2}\, b\, \Theta = \pm \tfrac{1}{2}\, b\, \alpha \text{ oder}$$
$$= \pm \tfrac{1}{2}\, b\, \alpha + 2\, n\, \pi \text{ sein.}$$

Auch hier ist aus gleichem Grunde wie oben $n = 0$ zu nehmen, also

$$\Theta = \pm \alpha,$$

d. h. jedesmal wenn der Winkel Θ gleich $+ \alpha$ oder $- \alpha$ ist, wird die Geschwindigkeit des Punktes m Null; er kehrt von hier aus um. Für den Punkt m' ergiebt sich die entsprechende Lage aus der Gleichung

$$\Theta' = - \frac{m}{m'}\, \Theta + \pi .$$

Es wird, wenn $\Theta = \alpha$

$$\Theta' = - \frac{m}{m'}\, \alpha + \pi = \alpha',$$

und wenn $\Theta = - \alpha$

$$\Theta' = \frac{m}{m'}\, \alpha + \pi = 2\, \pi - \alpha'.$$

Hiernach geschieht die Bewegung der beiden Punkte also in folgender Weise:

Von der Anfangslage, bestimmt durch die Winkel α und α' (zwischen denen die Relation $m\, \alpha = m'\, (\pi - \alpha')$ besteht) in entgegengesetzter Richtung ausgehend, nehmen die Punkte an absoluter Geschwindigkeit zu und erreichen jeder das absolute Maximum, wenn sie sich diametral gegenüber stehen, wobei $\Theta = 0$, und $\Theta' = \pi$ ist. Von hier aus nähern sich die Punkte wieder, wobei ihre Gesehwindigkeiten abnehmen und Null werden, wenn $\Theta = \alpha$ und $\Theta' = 2\, \pi - \alpha'$ ist. In Folge der abstossenden Kraft müssen die Punkte wieder umkehren, erreichen abermals das absolute Maximum der Geschwindigkeit, wenn $\Theta = 0$, $\Theta' = \pi$, und stehen zum zweiten Male momentan still, wenn $\Theta = \alpha$, $\Theta' = \alpha'$ ist, um von hier aus eine zweite Oscillation zu beginnen. Die Punkte pendeln also beständig hin und her und zwar m zwischen den Lagen $\Theta = + \alpha$ und $\Theta = - \alpha$, m' zwischen den Lagen $\Theta' = + \alpha'$ und $\Theta' = 2\, \pi - \alpha'$.

§ 7. Bestimmung der Schwingungsdauer. Aus der Gleichung 5 § 6 ergiebt sich die Zeit

$$t = \pm \frac{1}{C} \int_{\alpha}^{\Theta} \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}\, b\, \alpha \,.\, \cos \frac{1}{2}\, b\, \Theta}{\cos \frac{1}{2}\, b\, \Theta - \cos \frac{1}{2}\, b\, \alpha}}\, d\Theta$$

oder

$$t = \frac{\sqrt{\cos \frac{1}{2}\, b\, \alpha}}{C} \int_{\alpha}^{\Theta} \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}\, b\, \Theta}{\cos \frac{1}{2}\, b\, \Theta - \cos \frac{1}{2}\, b\, \alpha}}\, d\Theta$$

wobei das Vorzeichen der Wurzel unbestimmt gelassen ist. Es muss $+$ sein bei wachsenden Θ, — bei abnehmendem Θ.

Es mag nun substituirt werden

$$\cos \tfrac{1}{2} b\, \Theta = x \qquad \cos \tfrac{1}{2} b\, \alpha = a \qquad = x_0$$

$$-d\, \Theta = \frac{2\, dx}{b \sqrt{1 - x^2}} \qquad \frac{2 \sqrt{a}}{b C} = C_1$$

so folgt

$$t = C_1 \int_{x_0}^{x} \frac{\sqrt{x}\, dx}{\sqrt{(x - a)(1 - x^2)}}$$

1. $$= C_1 \int_{x_0}^{x} \frac{x\, dx}{\sqrt{x(x - a)(1 - x^2)}}.$$

Man erhält also ein elliptisches Integral. Um dasselbe auf die Normalform zu bringen, soll (vgl. Durège, Elliptische Functionen, Abschnitt V, § 22) folgende Substitution benutzt werden

2. $$x = \frac{1 + a - (1 - a) y}{1 + a + (1 - a) y} = \frac{1 - \frac{1 - a}{1 + a} y}{1 + \frac{1 - a}{1 + a} y} = \frac{1 - k^2 y}{1 + k^2 y},$$

wenn $\frac{1 - a}{1 + a} = k^2$ gesetzt wird. k ist reell und positiv, denn $a = \cos \frac{1}{2} b\, \alpha$ war (§ 6) ein positiver echter Bruch. Nun ist, wenn man $1 + k^2 y = N$ setzt

$$dx = \frac{-k^2(1 + k^2 y) - k^2(1 - k^2 y)}{N^2}\, dy = -\frac{2 k^2}{N^2}\, dy$$

$$x = \frac{1}{N} \cdot (1 - k^2 y)$$

$$x - a = \frac{1 - k^2 y - a(1 + k^2 y)}{N}$$

$$= \frac{(1 - a) - (1 + a) k^2 y}{N}$$

$$= \frac{(1 - a) - (1 - a) y}{N} = \frac{1 - a}{N} \cdot (1 - y)$$

$$x - 1 = \frac{1 - k^2 y - 1 - k^2 y}{N} = -\frac{2 k^2}{N} \cdot y$$

$$x + 1 = \frac{1 - k^2 y + 1 + k^2 y}{N} = \frac{2}{N}.$$

Das Radical in 1, wird also

$$\sqrt{-x(x-a)(x-1)(x+1)} = \sqrt{\frac{1-a}{N} \cdot \frac{2k^2}{N} \cdot \frac{2}{N} \cdot \frac{1}{N} \cdot y(1-y)(1-k^2 y)}$$

$$= \frac{2k\sqrt{1-a}}{N^2} \cdot \sqrt{y(1-y)(1-k^2 y)}$$

folglich

$$\frac{x\,dx}{\sqrt{-x(x-a)(x-1)(x+1)}} = -\frac{2k^2}{N^2} \cdot \frac{1-k^2 y}{N} \cdot \frac{N^2}{2k\sqrt{1-a}} \cdot \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(1-k^2 y)}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1+a}} \cdot \frac{1-k^2 y}{1 \quad k^2 y} \cdot \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(1-k^2 y)}} \cdot$$

Substituirt man hierin abermals

3. $y = z^2$ und nimmt $z = +\sqrt{y},\ 2\,dz = \frac{dy}{\sqrt{y}}$,

so folgt

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{-x(x-a)(x-1)(x+1)}} = -\frac{2}{\sqrt{1+a}} \int \frac{1-k^2 z^2}{1+k^2 z^2} \quad \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+a}} \int \frac{k^2 z^2 - 1}{k^2 z^2 + 1} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} \cdot$$

Da nun $\frac{k^2 z^2 - 1}{k^2 z^2 + 1} = 1 - \frac{2}{1 + k^2 z^2}$, so erhält man

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{-x(x-a)(x-1)(x+1)}} = \frac{2}{\sqrt{1+a}} \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}$$

$$- \frac{4}{\sqrt{1+a}} \int \frac{dz}{(1+k^2 z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}},$$

und substituirt man endlich

4. $z = \sin\varphi \qquad \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = d\varphi$,

so erhält man schliesslich

5. $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{-x(x-a)(x-1)(x+1)}} = \frac{2}{\sqrt{1+a}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2\varphi}}$$

$$- \frac{4}{\sqrt{1+a}} \int \frac{d\varphi}{(1+k^2 \sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2 \sin^2\varphi}}$$

Es bleibt noch die Bestimmung der Grenzen übrig. Nach einander sind folgende Substitutionen gemacht

$$x = \cos \tfrac{1}{2} b\, \Theta \qquad \text{und} \qquad a = \cos \tfrac{1}{2} b\, \alpha > 0$$

Da Θ beständig zwischen den Grenzen $+\alpha$ und $-\alpha$ bleibt, so ist auch x stets ein + echter Bruch

es ist

$$a \leqq x \leqq 1; \text{ wenn}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c} \Theta = \alpha & 0 & -\alpha & \Theta, \\ x = a & 1 & a & x. \end{array}$$

so ist

Sodann wurde gesetzt

$$x = \frac{1 + a - (1 - a) y}{1 + a + (1 - a) y};$$

wenn $x = a$, so folgt

$$a + a^2 + a (1 - a) y = 1 + a - (1 - a) y$$
$$(1 - a^2) y = 1 - a^2$$
$$y = 1;$$

wenn $x = 1$, so folgt

$$1 + a + (1 - a) y = 1 + a - (1 - a) y$$
$$y = 0;$$

mithin ist auch y stets ein positiver echter Bruch.

Dasselbe gilt für z, da $y^2 = z$ ist; und wenn

$$y = 0, \quad 1$$

so ist

$$z = 0, \quad 1.$$

Da $0 < z < 1$ so ist auch auch die Substitution $z = \sin \varphi$ reell, und wenn

$$z = 0, \quad 1$$

so ist

$$\varphi = 0, \quad \frac{\pi}{2}.$$

Stellt man die einander entsprechenden Grenzwerthe der Variabeln zusammen, so ist, wenn

$$\begin{array}{lll} \Theta = \alpha & 0 & -\alpha \\ x = a & 1 & a \\ y = 1 & 0 & 1 \\ z = 1 & 0 & 1 \\ \varphi = \tfrac{1}{2}\pi & 0 & \tfrac{1}{2}\pi \end{array}$$

Aus dieser Tabelle ist ersichtlich, dass $d\varphi$ gleiches Zeichen hat mit $d\Theta$, wenn Θ positiv ist, entgegengesetztes, wenn Θ negativ ist. Führt man nun die Grenzen in die Gleichung 5 ein, so erhält man, wenn

$$\Delta\varphi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} \text{ gesetzt wird,}$$

6. $$\int_a^x \frac{x\,dx}{\sqrt{-x(x-a)(x-1)(x+1)}} = \frac{2}{\sqrt{1+a}} \cdot \left\{ \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - 2\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+k^2\sin^2\varphi)\Delta\varphi} \right\}$$

Die Gleichung 1 geht daher über in die folgende

$$t = C_1 \cdot \frac{2}{\sqrt{1+a}} \cdot \left\{ \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - 2\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+k^2\sin^2\varphi)\Delta\varphi} \right\}$$

$$= C_1 \frac{2}{\sqrt{1+a}} \cdot \left\{ -\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{(1+k^2\sin^2\varphi)\Delta\varphi} - 2\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+k^2\sin^2\varphi)\Delta\varphi} \right\}$$

7. $$= \pm C_1 \frac{2}{\sqrt{1+a}} \cdot \left\{ K - 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{(1+k^2\sin^2\varphi)\Delta\varphi} - \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + 2\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+k^2\sin^2\varphi)\Delta\varphi} \right\}$$

Das Vorzeichen ist so zu nehmen, dass die rechte Seite positiv wird.

Die Zeit t_1, welche der Punkt m gebraucht, um aus seiner Anfangslage $\Theta = \alpha$ bis in die Lage $\Theta = 0$ zu gelangen, findet man, wenn man in den Integralen der Gleichung 7 für die oberen Grenzen φ den Werth 0 setzt, wodurch $F(\varphi)$ und $\Pi_1(\varphi, k^2)$ Null werden. Die Zeit t_2, welche der Punkt m gebraucht, um von $\Theta = 0$ in die Lage $\Theta = -\alpha$ zu gelangen, ist $= t_1$, wie sich leicht nachweisen lässt.

Man hat also für die halbe Schwingungsdauer

8. $$t_1 = C_1 \frac{2}{\sqrt{1+a}} \left[K - 2\,\Pi_1\left(\tfrac{1}{2}\pi, k^2\right)\right].$$

Cap. III.

Der allgemeine Fall.

§ 8. Zur Discussion der Bewegung der Punkte m und m' bei beliebigen Anfangsgeschwindigkeiten ω und ω' hat man die Gleichungen

1. $$m \frac{d\Theta}{dt} + m' \frac{d\Theta'}{dt} = m\,\omega + m'\,\omega' = c$$

2. $$\frac{d\psi}{dt} = F(\psi) = \pm \sqrt{(\omega' - \omega)^2 + \frac{m + m'}{m\,m'} \frac{k}{\varrho^3} \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}\psi - \sin\frac{1}{2}\psi_0}{\sin\frac{1}{2}\psi_0 \,.\, \sin\frac{1}{2}\psi}}$$

Aus der ersten folgte durch Integration mit Berücksichtigung der Constanten (§ 4, 2)

$$m\,\Theta + m'\,\Theta' = ct + m\,\alpha + m'\,\alpha' = ct + \beta,$$

und hieraus ($m + m' = M$)

3. $$\left\{\begin{aligned} \Theta &= -\frac{m'}{m}\,\Theta' + \frac{c}{m}\,t + \frac{\beta}{m} \\ \Theta' &= -\frac{m}{m'}\,\Theta + \frac{c}{m'}\,t + \frac{\beta}{m'} \\ \Theta' - \Theta = \psi &= -\frac{M}{m'}\,\Theta + \frac{c}{m'}\,t + \frac{\beta}{m'} \end{aligned}\right.$$

Die Gleichung 2 mag vereinfacht werden, indem man substituirt

$$\frac{m + m'}{m\,m'} \frac{k}{\varrho^3} = \gamma$$

$$+ \sqrt{\frac{(\omega' - \omega)^2 \sin\frac{1}{2}\psi_0 + \gamma}{\sin\frac{1}{2}\psi_0}} = \frac{1}{A}$$

$$\frac{\gamma \,.\, \sin\frac{1}{2}\psi_0}{(\omega' - \psi)^2 \sin\frac{1}{2}\psi_0 + \gamma} = \frac{\sin\frac{1}{2}\psi_0}{\frac{(\omega' - \omega)^2}{\gamma} \sin\frac{1}{2}\psi_0 + 1} = B.$$

Aus der letzten Gleichung erkennt man, dass wenn $\psi_0 < \pi$, $B < \sin\frac{1}{2}\psi_0$, also ein
3* positiver echter Bruch ist, und dass $2 \arcsin B < \psi_0$ ist.

Die Gleichung 2 wird nun

$$F(\psi) = \pm \sqrt{\frac{\left[(\omega' - \omega)^2 \sin\frac{1}{2}\psi_0 + \gamma\right] \sin\frac{1}{2}\psi - \gamma \,.\, \sin\frac{1}{2}\psi_e}{\sin\frac{1}{2}\psi_0 \sin\frac{1}{2}\psi}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{(\omega' - \omega)^2 \sin\frac{1}{2}\psi_0 + \gamma}{\sin\frac{1}{2}\psi_0}} \cdot \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}\psi - \frac{\gamma \,.\, \sin\frac{1}{2}\psi_0}{(\omega' - \omega)^2 \sin\frac{1}{2}\psi_0 + \gamma}}{\sin\frac{1}{2}\psi}}$$

4. $$= \pm \frac{1}{A} \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}\psi - B}{\sin\frac{1}{2}\psi}} = \pm \sqrt{1 - \frac{B}{\sin\frac{1}{2}\psi}}.$$

Durch Integration folgt daraus

5. $$t = A \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{\sqrt{\sin \frac{1}{2}\psi}}{\sqrt{\sin \frac{1}{2}\psi - B}} \, d\psi .$$

Es soll nun wieder untersucht werden, wann F (ψ) ein Maximum, Minimum, Null wird. Die Werthe von F (ψ), für welche diese Fälle eintreten, sollen ausgezeichnete Werthe von F (ψ) genannt werden.

§ 9. F (ψ) ein Maximum oder Minimum. Aus der Gleichung

1. $$m \frac{d\Theta}{dt} + m' \frac{d\Theta'}{dt} = c$$

folgt, dass die Geschwindigkeit des einen Punktes wächst, während die des andern abnimmt, dass also auch $\frac{d\Theta}{dt}$ ein Minimum, wenn $\frac{d\Theta'}{dt}$ ein Maximum und umgekehrt. Auch muss wenn, $\frac{d\Theta'}{dt}$ ein Maximum oder Minimum ist, F $(\psi) = \frac{d\Theta'}{dt} - \frac{d\Theta}{dt}$ ein Maximum resp. Minimum sein. Nun ist

$$F(\psi)^2 = \frac{1}{A^2} - \frac{B}{A^2 \sin \frac{1}{2}\psi},$$

und deren Ableitung

$$2\,F(\psi) \,.\, F'(\psi) = \frac{1}{2} \frac{B}{A^2} \frac{\cos \frac{1}{2}\psi}{\sin^2 \frac{1}{2}\psi} \cdot \frac{d\psi}{dt} .$$

Soll ein Maximum oder Minimum von F (ψ) stattfinden, so muss die rechte Seite Null sein, also

$$\cos \tfrac{1}{2}\psi = 0$$

2. $$\psi = \pi + 2\,n\,\pi$$

d. h. die Winkel Θ' und Θ müssen sich um ein ungerades Vielfaches von π (oder um π, unterscheiden. Demnach ist

3. $$F(\pi) = \pm \frac{1}{A} \sqrt{1 - B}$$

ein Maximum oder Minimum. Da nun dt beständig positiv, so muss die Wurzel auf der rechten Seite in 3 gleiches Zeichen mit $d\psi$ haben; es wird also ein Maximum stattfinden, wenn $d\psi$ positiv, d. h. wenn die Differenz $\Theta' - \Theta = \psi$ der Winkel Θ' und Θ wächst, im andern Falle das Minimum.

Es sei nun W' das Maximum von $\frac{d\Theta'}{dt}$
w' „ Minimum „ „
W „ Maximum „ $\frac{d\Theta}{dt}$
w „ Minimum „ „

so ist

$$4.\ \begin{cases} W' - w = F(\pi) = \frac{1}{A}\sqrt{1 - B} \\ w' - W = \qquad - \frac{1}{A}\sqrt{1 - B}. \end{cases}$$

Nach der Gleichung 1 ist aber

$$5.\ \begin{cases} m\ w + m'\ W' = c \\ m\ W + m'\ w' = c \end{cases}$$

Aus den Gleichungen 4 und 5 ergeben sich nun folgende Werthe von W', w', W und w

$$6.\ \begin{cases} W' = \frac{c}{M} + \frac{m}{M}\frac{1}{A}\sqrt{1 - B} \\ w' = \frac{c}{M} - \frac{m}{M}\frac{1}{A}\sqrt{1 - B} \\ W = \frac{c}{M} + \frac{m'}{M}\frac{1}{A}\sqrt{1 - B} \\ w = \frac{c}{M} - \frac{m'}{M}\frac{1}{A}\sqrt{1 - B}. \end{cases}$$

Während die Geschwindigkeit von m' sich vom Maximum bis zum Minimum um

$$W' - w' = 2\,\frac{m}{M}\frac{1}{A}\sqrt{1 - B}$$

verringert, nimmt die des Punktes m zu um

$$W - w = 2\,\frac{m'}{M}\frac{1}{A}\sqrt{1 - B},$$

welche Werthe das in 1 enthaltene Gesetz befriedigen; denn es ist

$$W' - w' : W - w = m : m'.$$

Aus den Gleichungen 6 ergiebt sich noch folgendes Gesetz der Bewegung (c als positiv vorausgesetzt):

1) wenn $c - m\,\frac{1}{A}\sqrt{1 - B} > 0$, so hat der Punkt m' stets positive Geschwindigkeit; es muss also in diesem Falle auch seine Anfangsgeschwindigkeit ω' positiv sein.

2) wenn $c - m\,\frac{1}{A}\sqrt{1 - B} = 0$, so wird das Minimum der Geschwindigkeit von m' Null. Der Punkt m' bewegt sich auch in diesem Falle nur in positiver Richtung.

3) wenn $c - m\,\frac{1}{A}\sqrt{1 - B} < 0$, so hat der Punkt m' auch negative Geschwindigkeit; er muss zu irgend einer Zeit zum Stillstande kommen und sich dann in entgegengesetzter Richtung bewegen.

Ein Gleiches gilt vom Punkte m. Er bewegt sich (immer $c > 0$ vorausgesetzt) nur in positiver Richtung, wenn $c - m' \frac{1}{A} \sqrt{1-B} \geqq 0$, er kommt zum Stillstande und kehrt um, wenn $c - m' \frac{1}{A} \sqrt{1-B} < 0$ ist.

Wäre $c < 0$, so würde man dieselbe Reflexion auf die Maxima der Geschwindigkeiten W' und W anwenden können. Doch ist dies nicht erforderlich, da man die feste Richtung L L' von der aus die Winkel α und Θ gerechnet werden, sich so gelegt denken kann, dass $m\,\omega + m'\,\omega'$ positiv und zugleich $\alpha' > \alpha$ wird; man braucht nur die Buchstaben zu vertauschen.

Es erhellt noch aus den Gleichungen 6, dass bei entgegengesetzten Anfangsgeschwindigkeiten nicht beide Punkte immer positive Richtung haben können, sondern höchstens der eine. Wenn nämlich

$$c - m \frac{1}{A} \sqrt{1-B} \geqq 0, \text{ dagegen}$$
$$c - m' \frac{1}{A} \sqrt{1-B} < 0,$$

so behält der Punkt m' immer positive Geschwindigkeit, während m sich bald in positiver bald in negativer Richtung bewegt, und umgekehrt.

§ 10. $F(\psi) = 0$. 1. Damit $F(\psi) = \frac{1}{A} \sqrt{1 - \frac{B}{\sin \frac{1}{2} \psi}}$ Null wird, ist erforderlich, dass

$$\sin \tfrac{1}{2} \psi = B$$
$$\tfrac{1}{2} \psi = \arcsin B + 2 n \pi,$$

oder da ja immer die Differenz $\psi = \Theta' - \Theta \leqq 2\pi$ ist,

2. $$\left. \begin{aligned} \psi &= 2 \arcsin B \text{ oder} \\ \psi &= 2\pi - 2 \arcsin B \end{aligned} \right\}$$

Aus der Gleichung

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\Theta'}{dt} - \frac{d\Theta}{dt}$$

erhellt, dass, wenn $\frac{d\psi}{dt} = 0$ ist, die Punkte m und m' gleich grosse und gleichgerichtete Geschwindigkeiten haben müssen. Die Grösse dieser Geschwindigkeit folgt aus der Gleichung

$$m \frac{d\Theta}{dt} + m' \frac{d\Theta'}{dt} = c,$$

wenn man darin setzt $\frac{d\Theta}{dt} = \frac{d\Theta'}{dt}$

$$(m + m') \frac{d\Theta}{dt} = c \text{ oder}$$

3. $$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{d\Theta'}{dt} = \frac{c}{M}$$

Dass $F(\psi) = \frac{d\Theta'}{dt} - \frac{d\Theta}{dt}$ immer einmal Null werden muss, erhellt aus den Gleichungen 6 des vorigen Paragraphen. Denn da die Geschwindigkeit des Punktes m' abnehmend alle Werthe von $\frac{c}{M} + \frac{m}{M}\frac{1}{A}\sqrt{1-B}$ bis $\frac{c}{M} - \frac{m}{M}\frac{1}{A}\sqrt{1-B}$, und gleichzeitig die Geschwindigkeit des Punktes m zunehmend alle Werthe von $\frac{c}{M} - \frac{m'}{M}\frac{1}{A}\sqrt{1-B}$ bis $\frac{c}{M} + \frac{m'}{M}\frac{1}{A}\sqrt{1-B}$ continuirlich durchläuft, so müssen beide Punkte einmal gleiche Geschwindigkeit haben, also die Differenz ihrer Geschwindigkeiten Null werden.

Noch verdient bemerkt zu werden, dass jedesmal wenn $F(\psi) = \frac{d\psi}{dt} = 0$ ist, auch die Differenz $\psi = \Theta' - \Theta$ selbst ein Maximum oder Minimum ist, dass also alle Werthe, welche $\psi = \Theta' - \Theta$ annehmen kann, zwischen $\psi = 2 \arcsin B$ und $\psi = 2\pi - 2 \arcsin B$ enthalten sind (Gleichung 2). Da nach § 8, 3* $2 \arcsin B < \psi_0$, so ist $2 \arcsin B$ das Minimum und $2\pi - 2 \arcsin B$ das Maximum von $\psi = \Theta' - \Theta$

§ 11. Die Zeit, während welcher $F(\psi)$ die einzelnen Intervalle zwischen seinen ausgezeichneten Werthen durchläuft. Denkt man sich die Bewegung der Punkte von der Anfangslage ψ_0 aus so beschaffen, dass die Punkte zuerst in die grösste Nähe $\psi = 2 \arcsin B$ gelangen, und die dann folgende Bewegung durch die ausgezeichneten Werthe von $F(\psi)$ $(0, +\frac{1}{A}\sqrt{1-B}, 0, -\frac{1}{A}\sqrt{1-B})$ in vier Intervalle getheilt, so lassen sich die den einzelnen Intervallen entsprechenden Zeiten leicht bestimmen. Die folgende Tabelle giebt die entsprechenden Werthe von ψ, $F(\psi)$.

$\psi = 2 \arcsin B$ (Minimum)	π	$2\pi - 2 \arcsin B$ (Maximum)	π
$F(\psi) = 0$	$+\frac{1}{A}\sqrt{1-B}$ (Maximum)	0	$-\frac{1}{A}\sqrt{1-B}$ (Minimum)

Es sei nun

t_0	die Zeit, während $F(\psi)$ läuft von	$F(\psi)$	bis $F(2 \arcsin B)$
t_1	„ „ „ „ „ „	$F(2 \arcsin B)$	„ $F(\pi)$
t_2	„ „ „ „ „ „	$F(\pi)$	„ $F(2\pi - 2 \arcsin B)$
t_3	„ „ „ „ „ „	$F(2\pi - 2 \arcsin B)$	„ $F(\pi)$
t_4	„ „ „ „ „ „	$F(\pi)$	„ $F(2 \arcsin B)$

$t_5 = t_1$, $t_5 = t_2$ ...... $t_{(4n + a)} = t_a$.

Aus der Gleichung

$$t = \pm A \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{\sqrt{\sin \frac{1}{2} \psi}}{\sqrt{\sin \frac{1}{2} \psi - B}} d \psi$$

folgt, wenn das negative Vorzeichen der Wurzel genommen wird, da d ψ negativ ist, und

$2 \arcsin B = a$ gesetzt wird

1. $$t_0 = - A \int_{\psi_0}^{a} = A \int_0^{\psi_0} - A \int_0^{a}$$

(worin die Abkürzung leicht verständlich).

2. $$t_1 = A \int_a^{\pi} = A \int_0^{\pi} - A \int_0^{a}.$$

2* $$t_0 + t_1 = A \int_0^{\psi_0} + A \int_0^{\pi} - 2 A \int_0^{a}.$$

$$t_2 = A \int_{\pi}^{2\pi - a} = A \int_{\pi}^{2\pi} - A \int_{2\pi - a}^{2\pi}$$

3. $$= A \int_0^{\pi} - A \int_0^{a}$$

3* $$t_0 + t_1 + t_2 = A \int_0^{\psi_0} + 2 A \int_0^{\pi} - 3 A \int_0^{a}$$

4. $$t_3 = t_2$$

4* $$t_0 + \ldots + t_3 = A \int_0^{\psi_0} + 3 A \int_0^{\pi} - 4 A \int_0^{a}$$

5. $$t_4 = - A \int_{\pi}^{a} = A \int_0^{\pi} - A \int_0^{a}$$

5* $$t_0 + \ldots + t_4 = A \int_0^{\psi_0} + 4 A \int_0^{\pi} - 5 \int_0^{a}$$

Weiter ist dann $t_5 = t_1$, $t_6 = t_2$ etc.

Nennt man die Zeit, während F (ψ) alle seine Werthe einmal zunehmend und abnehmend durchläuft T_1, so ist

7. $$T_1 = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 4 A \int_0^{\pi} - 4 A \int_0^{a}.$$

Die Zeit t_1, welche erforderlich ist, damit F (ψ) von einem ausgezeichneten Werthe zum andern übergeht, ist immer gleich gross und es ist daher

8. $$t = A \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{\sqrt{\sin \frac{2}{2} \psi}}{\sqrt{\sin \frac{1}{2} \psi - B}} d \psi + 4 n t_1$$

eine periodische Function von ψ, daher auch von Θ und Θ'.

§ 12. Die Grösse der Winkel Θ und Θ' bei den ausgezeichneten Werthen von F (ψ). Die Punkte nähern sich entweder oder entfernen sich von einander. Der Fall, dass sie in der Anfangslage stehen bleiben, würde nur stattfinden, wenn $\omega = \omega' = 0$ und zugleich $\alpha' - \alpha = \pi$ ist. Denn in diesem Falle würde die zwischen beiden Punkten wirkende abstossende Kraft in die Normale der Curve fallen, also durch den Widerstand der letzteren aufgehoben werden.

Es möge angenommen werden, dass die Punkte m und m' sich nähern, dann muss bei gleichgerichteter Anfangsgeschwindigkeit $\omega > \omega'$ sein, bei entgegengesetzter ω positiv und ω' negativ. In beiden Fällen erreicht F (ψ) zuerst den ausgezeichneten Werth F (ψ) = 0, darauf F (ψ) $= \frac{1}{A} \sqrt{1 - B}$, F ($\psi$) = 0, F ($\psi$) $= - \frac{1}{A} \sqrt{1 - B}$ und wieder F (ψ) = 0.

Die zusammengehörigen Werthe von ψ, F (ψ), t und Θ mögen nun sein

ψ	F (ψ)	t	Θ	Θ'
$\alpha' - \alpha = \psi_0$	$\omega' - \omega$	0	α	α'
2 arcsin B	0	t_0	Θ_0	Θ_0'
π	$+ \frac{1}{A} \sqrt{1 - B}$	$t_0 + t_1$	Θ_1	Θ_1'
$2 \pi - 2$ arcsin B	0	$t_0 + 2 t_1$	Θ_2	Θ_2'
π	$- \frac{1}{A} \sqrt{1 - B}$	$t_0 + 3 t_0$	Θ_3	Θ_3'
2 arcsin B	0	$t_0 + 4 t_1$	Θ_4	Θ_4'
. . .	. . .	. . . $t_0 + n t_1$	. . . Θ_n	. . . Θ_n'

Zur Bestimmung der Winkel Θ und Θ' dienen die Gleichungen

$$\Theta' - \Theta = - \frac{M}{m'} \Theta + \frac{c}{m'} t + \frac{\beta}{m'}$$

$$\Theta' - \Theta = \psi .$$

Aus ihnen folgen

1. $$\Theta = - \frac{m'}{M} \psi + \frac{c}{M} t + \frac{\beta}{M}$$

2. $$\Theta' = \Theta + \psi = + \frac{m}{M} \psi + \frac{c}{M} t + \frac{\beta}{M} .$$

Setzt man in diese Gleichungen die einander entsprechenden Werthe von ψ und t ein, so erhält man folgende Gleichungen:

3. $$\left\{ \begin{aligned} \Theta_0 &= \frac{\beta}{M} + \frac{c}{M} t_0 - 2 \frac{m'}{M} \arcsin B \\ \Theta_0' &= \frac{\beta}{M} + \frac{c}{M} t_0 + 2 \frac{m}{M} \arcsin B \end{aligned} \right.$$

4. $$\left\{ \begin{aligned} \Theta_1 &= \Theta_0 + \frac{c}{M} t_1 - \frac{m'}{M} (\pi - 2 \arcsin B) \\ \Theta_1' &= \Theta_0' + \frac{c}{M} t_1 + \frac{m}{M} (\pi - 2 \arcsin B) \end{aligned} \right.$$

5. $$\left\{ \begin{aligned} \Theta_2 &= \Theta_0 + 2 \frac{c}{M} t_1 - 2 \frac{m'}{M} (\pi - 2 \arcsin B) \\ \Theta_2' &= \Theta_0' + 2 \frac{c}{M} t_1 + 2 \frac{m}{M} (\pi - 2 \arcsin B) \end{aligned} \right.$$

6. $$\left\{ \begin{aligned} \Theta_3 &= \Theta_0 + 3 \frac{c}{M} t_1 - \frac{m'}{M} (\pi - 2 \arcsin B) \\ \Theta_3' &= \Theta_0' + 3 \frac{c}{M} t_1 + \frac{m}{M} (\pi - 2 \arcsin B) \end{aligned} \right.$$

7. $$\left\{ \begin{aligned} \Theta_4 &= \Theta_0 + 4 \frac{c}{M} t_1 \\ \Theta_4' &= \Theta_0' + 4 \frac{c}{M} t_1 \end{aligned} \right.$$

Allgemein ergiebt sich

8. $$\left\{ \begin{aligned} \Theta_{4n} &= \Theta_0 + 4 n \frac{c}{M} t_1 \\ \Theta_{4n}' &= \Theta_0' + 4 n \frac{c}{M} t_1 \end{aligned} \right.$$

Man sieht hieraus, dass in der Zeit $4 t_1 = T$, die Winkel Θ und Θ' jedesmal um $4 \frac{c}{M} t_1$ zunehmen, wenn c positiv ist, abnehmen bei negativem c.

Man bemerkt ausserdem, dass in den beiden ersten Zeitintervallen, t_1 und t_2, in welchen ψ vom Minimum 2 arcsin B bis zum Maximum $2\pi - 2$ arcsin B zunimmt, der Winkel

$$\Theta \text{ zunimmt je um } \frac{c}{M} t_1 - \frac{m'}{M}(\pi - 2 \arcsin B) \text{ und}$$

$$\Theta' \quad " \quad " \quad " \quad \frac{c}{M} t_1 + \frac{m}{M}(\pi - 2 \arcsin B).$$

In den beiden letzten Intervallen, in welchen ψ vom Maximum bis zum Minimum abnimmt, wächst

$$\Theta \text{ je um } \frac{c}{M} t_1 + \frac{m'}{M}(\pi - 2 \arcsin B)$$

$$\Theta' \quad " \quad " \quad \frac{c}{M} t_1 - \frac{m}{M}(\pi - 2 \arcsin B).$$

Die Zunahmen von Θ sind also in den beiden letzten Intervallen grösser als in den ersten, die von Θ' umgekehrt.

In Uebereinstimmung mit dem in Cap. II. gefundenen Resultate ist nach Glch. 8

$$\Theta_{4n} = \Theta_0 = \alpha, \text{ wenn } c = 0 \text{ ist.}$$

§ 13. $\frac{d\Theta}{dt} = 0$ und $\frac{d\Theta'}{dt} = 0$. Zur weiteren Discussion der Bewegung beider Punkte soll nun untersucht werden, unter welchen Bedingungen die Punkte die Richtung ihrer Bewegung ändern, nämlich wann dies geschieht, und welches in diesem Falle die Grösse der Winkel Θ und Θ' ist.

Nach den Gleichungen 6 des § 9 lassen sich nun drei Fälle unterscheiden.

I. Wenn

$$c - m' \frac{1}{A} \sqrt{1 - B} \geqq 0 \text{ und}$$

$$c - m \frac{1}{A} \sqrt{1 - B} \geqq 0$$

ist, so sind die Minima der Geschwindigkeiten von m und m' positiv; beide Punkte bewegen sich also nur in positiver Richtung.

II. Wenn aber

$$c - m' \frac{1}{A} \sqrt{1 - B} > 0$$

$$c - m \frac{1}{A} \sqrt{1 - B} < 0,$$

(also $m > m'$), so behält der Punkt m seine positive Richtung, m' dagegen wird sich auch in negativer Richtung bewegen. Beim Uebergang des Punktes m' aus der positiven in die negative Richtung ist $\frac{d\Theta'}{dt} = 0$ und aus der Gleichung $m \frac{d\Theta}{dt} + m' \frac{d\Theta'}{dt} = c$ folgt

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{c}{m}$$

Die Zeit τ', nach welcher der Punkt m' seine Bewegungsrichtung ändert, ergiebt sich aus den Gleichungen

1. $$t = A \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{\sqrt{\sin \frac{1}{2} \psi}}{\sqrt{\sin \frac{1}{2} \psi - B}} \, d\,\psi$$

und

2. $$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{A} \sqrt{1 - \frac{B}{\sin \frac{1}{2} \psi}},$$

wenn man aus der letzten zuerst den Werth des Winkels ψ ermittelt. Nun ist wenn $\frac{d\Theta'}{dt} = 0$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\,\Theta'}{dt} - \frac{d\Theta}{dt} = -\frac{c}{m}, \text{ mithin}$$

$$-\frac{c}{m} = -\frac{1}{A} \sqrt{1 - \frac{B}{\sin \frac{1}{2} \psi}}$$

$$\sin \tfrac{1}{2} \psi = \frac{B}{1 - \frac{A^2 c^2}{m^2}},$$

3. $$\left\{ \begin{aligned} \psi &= 2 \arcsin \frac{B}{1 - \frac{A^2 c^2}{m^2}} \text{ oder} \\ &= 2\pi - 2 \arcsin \frac{B}{1 - \frac{A^2 c^2}{m^2}} \end{aligned} \right.$$

Dass der für ψ gefundene Werth möglich ist, folgt aus der Annahme

$$c - m \frac{1}{A} \sqrt{1 - B} < 0. \text{ Denn es ist}$$

$$\frac{A^2 c^2}{m^2} < 1 - B$$

4. $$B < 1 - \frac{A^2 c^2}{m^2}$$

$$\frac{B}{1 - \frac{A^2 c^2}{m^2}} < 1.$$

Die Grösse B ist nach § 8 ein positiver echter Bruch, folglich muss nach Glch. 4 auch $1 - \frac{A^2 c^2}{m^2}$ positiv und ebenfalls ein echter Bruch sein, also auch

$$\frac{B}{1 - \frac{A^2 c^2}{m^2}} > B \text{ und}$$

$$2 \arcsin \frac{B}{1 - \frac{A^2 c^2}{m^2}} > 2 \arcsin B \text{ und}$$

$$2\pi - 2 \arcsin \frac{B}{1 - \frac{A^2 c^2}{m^2}} < 2\pi - 2 \arcsin B.$$

Nach Voraussetzung ist $\frac{d\Theta}{dt}$ immer positiv, aus $F(\psi) = \frac{d\psi}{dt} = -\frac{d\Theta}{dt}$ erhellt also, dass die positive Richtung von m' in die negative übergeht und umgekehrt nur wenn $d\psi$ negativ, oder wenn ψ im Abnehmen begriffen ist. Der Punkt m' muss demnach seine Bewegungsrichtung, während ψ vom Maximum bis zum Minimum abnimmt, zweimal ändern, einmal wenn (Gl. 3) $\psi = 2 \arcsin \frac{B}{1 - \frac{A^2 c^2}{m^2}}$, das andere Mal wenn $\psi = 2\pi - 2 \arcsin \frac{B}{1 - \frac{A^2 c^2}{m^2}}$.

Zur Berechnung der Zeit τ' nach welcher der Punkt m' zum ersten Male seine Bewegungsrichtung ändert, ist zu unterscheiden, ob ω' positiv oder negativ.

Es sei ω' negativ, ψ also in der Abnahme, so wird der Punkt m' die Geschwindigkeit $\frac{d\Theta'}{dt} = 0$, erreichen, wenn $\psi = 2 \arcsin \frac{B}{1 - \frac{A^2 c^2}{m^2}}$. Es ist also

$$\tau' = - A \int_{\psi_0}^{b} \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{3} \psi}{\sin \frac{1}{2} \psi - B}}\, d\psi$$

$$\text{worin } b = 2 \arcsin \frac{B}{1 - \frac{A^2 c^2}{m^2}},$$

oder

5. $$\tau' = A \int_{0}^{\psi_0} - A \int_{0}^{b} .$$

$$\tau' \text{ ist kleiner als } t_0 = A \int_{0}^{\psi_0} - A \int_{0}^{2 \arcsin B.} .$$

Der Punkt m' hat von hieraus positive Richtung, während ψ zuerst noch bis zum Minimum abnimmt, dann bis zum Maximum $2\pi - 2 \arcsin B$ wächst und endlich wieder bis $2\pi - 2 \arcsin \frac{B}{1 - \frac{A^2 c^2}{m^2}}$ abnimmt. Die Zeit bis zum Maximum von ψ ist aber $t_0 + t_1 + t_2 = t_0 + 2 t_1$, mithin die gesammte Zeit bis zur zweiten Richtungsänderung des Punktes m' (mit Berücksichtigung, dass wegen des negativen Werthes von $d\psi$ auch die Wurzel das Vorzeichen — bekommen muss)

$$\tau_1' = t_0 + t_1 + t_2 - A \int_{2\pi - 2 \arcsin B}^{2\pi - 2 \arcsin \frac{B}{1 - \frac{A^2 c^2}{m^2}}}$$

$$= t_0 + 2 t_1 + A \int_{2 \arcsin B}^{2 \arcsin \frac{B}{1 - \frac{A^2 c^2}{m^2}}}$$

6. $$= t_0 + 2\ t_1 + A \int_0^b - A \int_0^a .$$

Setzt man $\mathfrak{T}_1 = \tau_1' - \tau$, so folgt

7. $$\mathfrak{T}_1 = 2\ t_2 + 2\ A \int_0^b - 2\ A \int_0^a .$$

Der Punkt m' hat nun bei abnehmendem ψ negative Richtung von $\psi = 2\pi - b$ bis $\psi = 2 \arcsin \frac{B}{1 - \frac{A^2 c^2}{m^2}}$. Die Zeit, während m' negative Richtung hat, ist nun

$$\mathfrak{T}_2 = - A \int_{2\pi - b}^{b} = A \int_{b}^{2\pi - b} = A \int_0^{2\pi} - A \int_0^b - A \int_{2\pi - b}^{2\pi}$$

es ist aber auch hier wieder

$$- A \int_{2\pi - b}^{2\pi} = - A \int_0^b ,$$

folglich

8. $$\mathfrak{T}_2 = 2\ A \int_0^{\pi} - 2\ A \int_0^b$$

$\mathfrak{T}_1$ ist die Zeit für die positive, $\mathfrak{T}_2$ für die negative Richtung von m'. Die Zeit für einmaliges Hin- und Herpendeln des Punktes m' ist die Summe von 7 und 8

9. $$\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2 = 2\ t_1 + 2\ A \int_0^{\pi} - 2\ A \int_0^a = 4\ t_1 ,$$

was mit § 11 übereinstimmt.

Bildet man noch die Gleichung

10. $$\mathfrak{T}_1 - \mathfrak{T}_2 = 4\ A \int_0^b - 4\ A \int_0^a = 4\ A \int_a^b ,$$

so folgt hieraus, dass die Zeit für die positive Richtung von m' um $4\ A \int_a^b$ grösser als die für die negative ist.

Die Grösse der Winkel Θ und Θ', wenn $\frac{d\Theta'}{dt} = 0$ ergiebt sich aus den Gleichungen 1 und 2 des § 12

$$\Theta = -\frac{m'}{M}\psi + \frac{c}{M}t + \frac{\beta}{M}$$

$$\Theta' = +\frac{m}{M}\psi + \frac{c}{M}t + \frac{\beta}{M}$$

wenn man darin die einander entsprechenden Werthe

$$\psi = b \quad \text{und} \quad t = \tau', \text{ und}$$
$$\psi = 2\pi - b \quad t = \tau' + \mathfrak{T}_1$$

substituirt. Diese Gleichungen, die hier übergangen werden mögen, würden in Uebereinstimmung mit § 12 zeigen, dass in der Zeit 4 t_1 die Winkel Θ und Θ' je um 4 $\frac{e}{M}$ t_1 zunehmen.

Anmerkung. Wäre ω' positiv, so würde m' zum ersten Male in entgegengesetzter Richtung übergehen, wenn das abnehmende $\psi = 2\pi - b$ wäre. Im Uebrigen würde die Untersuchung zu demselben Resultate führen.

Auch die Annahme, dass der Punkt m' seine (positive) Richtung beibehält, dagegen der Punkt m um ihn herumpendelt würde Nichts Neues liefern.

III. Es bleibt noch der Fall übrig, dass

$$c - m' \frac{1}{A}\sqrt{1 - B} < 0$$

$$c - m \frac{1}{A}\sqrt{1 - B} < 0,$$

wobei auch wieder $c > 0$ angenommen werden möge. Auch sei $m > m'$ und ω positiv, ω' negativ, so dass also ψ von ψ_0 aus zuerst das Minimum $\psi = 2 \arcsin B$ erreicht. Die Zeit, zu welcher m zum ersten, zweiten, dritten Male die Geschwindigkeit Null erreicht sei τ, τ_1, τ_2; für m' seien diese Zeiten τ', τ_1', τ_2'.

Aus der Gleichung $m\frac{d\Theta}{dt} + m'\frac{d\Theta'}{dt} = c > 0$ folgt, wenn

$$\frac{d\Theta}{dt} = 0, \text{ so ist } \frac{d\Theta'}{dt} = \frac{c}{m'} > 0$$

$$\frac{d\Theta'}{dt} = 0, \text{ „ „ } \frac{d\Theta}{dt} = \frac{c}{m} > 0.$$

Wenn der eine von beiden Punkten in seiner Bewegung umkehrt, ist der andere stets positiv gerichtet.

Aus der Gleichung $F(\psi) = \frac{d\Theta'}{d\Theta} - \frac{d\Theta}{dt}$ folgt, wenn

$$\frac{d\Theta}{dt} = 0, \text{ so ist } \frac{d\Theta'}{dt} = F(\psi) = \frac{d\psi}{dt}$$

$$\frac{d\Theta'}{dt} = 0, \text{ „ „ } \frac{d\Theta}{dt} = F(\psi) = -\frac{d\psi}{dt},$$

d. h. der Punkt m ändert das Vorzeichen seiner Geschwindigkeit nur bei wachsendem ψ, der Punkt m' dagegen nur bei abnehmendem ψ.

Wie vorher Gleichung 3 sich ergab, so folgt auch jetzt:

wenn $\frac{d\Theta'}{dt} = 0$, so ist

11. $$\left\{ \begin{aligned} \psi &= 2 \arcsin \frac{B}{1 - \frac{A^2 c^2}{m^2}} = b \text{ oder} \\ &= 2\pi - b. \end{aligned} \right.$$

und wenn $\frac{d\Theta}{dt} = 0$, so ist

12. $$\left\{ \begin{aligned} \psi &= 2 \arcsin \frac{B}{1 - \frac{A^2 c^2}{m^{2\prime}}} = b' \text{ oder} \\ &= 2\pi - b'. \end{aligned} \right.$$

Wenn also von der Anfangslage ψ_0 aus, (wobei $\frac{d\Theta}{dt}$ positiv, $\frac{d\Theta'}{dt}$ negativ ist) die Punkte in die Lage $\psi = 2 \arcsin B = a$ gelangen, so muss, da $F(2 \arcsin B) = 0$ ist, der Punkt m' umgekehrt sein, beide Punkte bewegen sich in positiver Richtung. Wenn nun ψ vom Minimum bis zum Maximum wächst, so ändert Punkt m die Richtung seiner Bewegung zweimal, bei

$$\psi = 2 \arcsin \frac{B}{1 - \frac{A^2 c^2}{m'^2}} = b' \text{ und bei}$$

$$\psi = 2\pi - b';$$

bei abnehmendem ψ wird dann die Bewegung von m' wieder negativ bei

$$\psi = 2\pi - 2 \arcsin \frac{B}{1 - \frac{A^2 c^2}{m^2}} = 2\pi - b \text{ und positiv bei}$$

$$\psi = 2 \arcsin \frac{B}{1 - \frac{A^2 c^2}{m^2}} = b.$$

Beide Punkte bewegen sich daher in positiver Richtung 1) während ψ von $\psi = b$ bis $\psi = 2 \arcsin B = a$ abnimmt und dann wieder bis $\psi = b'$ wächst und 2) während

ψ von $2\pi - b'$ bis $\psi = 2\pi - a$ wächst und dann bis $\psi = 2\pi - b$ abnimmt. In den dazwischen liegenden Werthen ist bei wachsendem ψ $\frac{d\Theta}{dt}$ negativ von $\psi = b'$ bis $\psi = 2\pi - b'$ und bei abnehmendem ψ ist $\frac{d\Theta'}{dt}$ negativ von $\psi = 2\pi - b$ bis $\psi = b$.

Die Zeit $T = 4\,t_1$, innerhalb welcher der Winkelabstand beider Punkte einmal wachsend alle Werthe von $\psi = a$ bis $\psi = 2\pi - a$ und dann wieder abnehmend durchläuft, sei in die vier gleichen Intervalle t_1, t_2, t_3, t_4 getheilt, und die Bewegung erfolge von $\psi = a$ aus. Im ersten Zeitraum wächst ψ bis π, im zweiten bis $2\pi - a$; im dritten und vierten nimmt es ab bis π und a. Anfänglich haben beide Punkte positive Geschwindigkeit; im ersten Intervall aber bei $\psi = b'$ wird $\frac{d\Theta}{dt}$ negativ, im zweiten von $\psi = 2\pi - b'$ ab wieder positiv; im dritten wird $\frac{d\Theta'}{dt}$ von $\psi = 2\pi - b$ ab negativ, im vierten von b ab wieder positiv. Jeder Punkt ändert die Richtung seiner Bewegung zweimal hintereinander. In der Nähe des Minimums und des Maximums haben beide Punkte positive Geschwindigkeit, negative können sie gleichzeitig (wenn $c > 0$) nicht haben.

§ 14. Transformation der Gleichung $t = A\int_{\psi_0}^{\psi} \frac{\sqrt{\sin\frac{1}{2}\psi}}{\sqrt{\sin\frac{1}{2}\psi - B}}\,d\psi$. Der allgemeine Ausdruck für die Zeit t

1. $$t = A\int_{\psi_0}^{\psi} \frac{\sqrt{\sin\frac{1}{2}\psi}}{\sqrt{\sin\frac{1}{2}\psi - B}}\,d\psi$$

geht über durch Substitution von

$$\sin\tfrac{1}{2}\psi = x, \qquad \tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}\psi\,d\psi = dx, \qquad d\psi = \frac{2\,dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

in

$$t = 2A\int_{x_0}^{x} \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{(x - B)(1 - x^2)}}$$

2. $$= 2A\int_{x_0}^{x} \frac{x\,dx}{\sqrt{-x(x - B)(x - 1)(x + 1)}}$$

Dieses Integral kann auf dieselbe Weise wie das in der Gleichung 1 des § 7 transformirt werden; man erhält abgesehen von den Grenzen dasselbe Resultat, nur muss statt des positiven echten Bruches a der positive echte Bruch B gesetzt werden. Man erhält also

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{R}} = \frac{2}{\sqrt{1 + B}}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} - \frac{4}{\sqrt{1 + B}}\int \frac{d\varphi}{(1 + k^2\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi},$$

worin $k^2 = \frac{1 - B}{1 + B}$ ist.

Bestimmung der Grenzen:

Durch die Substitution $x = \sin \frac{1}{2} \psi$ und $B_o = \sin \frac{1}{2} \psi_o$ wird, wenn

$$\begin{array}{l|c|c} \psi = 2 \arcsin B & \pi & 2\pi - 2 \arcsin B \\ x = B & 1 & B \end{array}$$

Aus der Gleichung

$$x = \frac{1 - k^2 y}{1 + k^2 y}$$

ergiebt sich der Reihe nach für

$$\begin{array}{l|l} x = B & 1 \\ y = 1 & 0, \end{array}$$

und endlich aus

$$y = z^2 \text{ und } z = \sin \varphi,$$

dass, wenn

$$\begin{aligned} y &= 1\ ,\ 0, \\ z &= 1\ ,\ 0 \\ \varphi &= \tfrac{1}{2}\pi,\ 0 \text{ ist.} \end{aligned}$$

Den ausgezeichneten Werthen von ψ entsprechen also folgende Werthe von x, y, z, φ

ψ	x	y	z	φ
ψ_o	x_o	y_o	z_o	φ_o
$2 \arcsin B = a$	B	1	1	$\frac{1}{2}\pi$
π	1	0	0	0
$2\pi - 2 \arcsin B = 2\pi - a$	B	1	1	$\frac{1}{2}\pi$
ψ	x	y	z	φ

Da nun ψ beständig zwischen den Grenzen 2 arcsin B und $2\pi - 2$ arcsin B bleibt, so hat auch ψ nur Werthe zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$. Aber es erhellt auch noch, dass $d\varphi$ gleiches Zeichen mit $d\psi$ hat, wenn $\psi > \pi$, ungleiches wenn $\psi < \pi$ ist.

Die Gleichung 2 geht daher über in die folgende

4. $$t = \pm \frac{4A}{\sqrt{1+B}} \left\{ \int_{\varphi_o}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - 2 \int_{\varphi_e}^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + k^2 \sin^2\varphi)\, \Delta\varphi} \right\}$$

oder

4* $$t = \pm \frac{4A}{\sqrt{1+B}} \left[F(\varphi) - F(\varphi_o) - 2\, \Pi_1(\varphi, k^2) + 2\, \Pi_1(\varphi_o, k^2) \right]$$

Die Zeit τ, nach welcher ψ sein Minimum $\psi = 2 \arcsin B$ erreicht, ist

5. $$\tau = \pm \frac{4\,A}{\sqrt{1+B}} \left\{ \int_{\varphi_0}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\,\varphi}{\varDelta\,\varphi} - 2 \int_{\varphi_0}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\,\varphi}{(1 + k^2 \sin^2\varphi)\varDelta\,\varphi} \right\}$$

5* $$= \pm \frac{4\,A}{\sqrt{1+B}} \left[K - F(\varphi_0) - 2\,\Pi_1(\tfrac{1}{2}\pi, k^2) + 2\,\Pi_1(\varphi_0, k^2) \right].$$

Rechnet man die Zeit von diesem Momente ab, so ist dieselbe auszudrücken durch $t - \tau$. Diese Zeit ist (4*—5*)

6. $$t - \tau = \pm \frac{4\,A}{\sqrt{1+B}} \left[K - F(\varphi) - 2\,\Pi_1(\tfrac{1}{2}\pi, k^2) + 2\,\Pi_1(\varphi, k^2) \right],$$

worin das Zeichen so zu nehmen ist, dass die rechte Seite gleiches Zeichen mit der linken hat, sie also positiv wird, wenn $t - \tau > 0$.

Setzt man in 6 $\varphi = 0$, so ergiebt sich die Zeit $t_1 = \frac{1}{4}\,T$, welche erforderlich ist damit ψ jedes seiner vier Intervalle durchläuft

7. $$t_1 = \pm \frac{4\,A}{\sqrt{1+B}} \left[K - 2\,\Pi_1(\tfrac{1}{2}\pi, k^2) \right]$$

Die Gleichungen 6 und 7 gehen über in die Gleichungen 7 und 8 des § 7, wenn man $\omega = \omega' = 0$ setzt, und die Winkel α und α' so bestimmt, wie es in § 6 geschehen ist. Denn die Gleichungen unterscheiden sich nur durch die Constanten

$$A,\ B,\ k^2 = \frac{1-B}{1+B} \text{ einerseits und}$$

$$C_1,\ a,\ k^2 = \frac{1-a}{1+a} \text{ andererseits.}$$

Nun war $b = \frac{M}{m'}$, $C = \sqrt{\frac{m'}{m\,M}\,\frac{k}{\varrho^3}}$, folglich ist

$$C_1 = \frac{\sqrt{a}}{b\,.\,C} = \sqrt{\frac{a}{\frac{M}{m\,m'}\,\frac{k}{\varrho^3}}}.$$

Die Grösse $$A = \frac{\sin\frac{1}{2}\psi_0}{(\omega' - \omega)^2 \sin\frac{1}{2}\psi_0 + \frac{M}{m\,m'}\,\frac{k}{\varrho^3}}$$

wird aber für $\omega' = \omega = 0$ ebenfalls, da ja auch $\sin\frac{1}{2}\psi_0 = \sin\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha) = \cos\frac{1}{2}\,b\,\alpha = a$ ist

$$A = \sqrt{\frac{a}{\frac{M}{m\,m'}\,\frac{k}{\varrho^3}}}, \text{ also } A = C_1.$$

Die Grösse B aber wird für $\omega' = \omega = 0$

$$B = \sin \tfrac{1}{2} \psi_0 = a .$$

Daher sind endlich auch die Moduln

$$\frac{1 - a}{1 + a} = \frac{1 - B}{1 + B}.$$

§ 15. Recapitulation. Fasst man die gewonnenen Resultate noch einmal zusammen, so ergiebt sich Folgendes:

Die Lage der Punkte m und m' sei bestimmt durch die Winkel Θ und Θ', ihre Anfangslagen durch die Winkel α und α'; auch sei $\alpha < \alpha' < \pi$; die Anfangsgeschwindigkeiten seien $\varrho\, \omega$ und $\varrho\, \omega'$ und $m\, \omega + m'\, \omega' = c > 0$.

Jedesmal in einer constanten Zeit T dreht sich das System in positiver Richtung um einen constanten Winkel $\frac{c}{m + m'}$ T, d. h. die Winkel Θ und Θ' nehmen jeder um $\frac{c}{m + m'}$ T zu. Nach dieser Zeit haben die Punkte m und m' immer wieder dieselbe Geschwindigkeit und denselben Winkelabstand $\Theta' - \Theta = \psi$. (Wäre $c = 0$, so würde keine Drehung des Systems stattfinden, und wenn $c < 0$, so würde es sich in negativer Richtung drehen.) Innerhalb der Zeit T durchläuft der Winkelabstand ψ einmal wachsend und abnehmend alle Werthe zwischen einem Minimum a und einem Maximum $2\,\pi - a$.

Theilt man die sämmtlichen Werthe, welche ψ annehmen kann, in die vier Intervalle a bis π, π bis $2\,\pi - a$, $2\,\pi - a$ bis π, π bis a, denen der Reihe nach die Zeitintervalle t_1, t_2, t_3, t_4 entsprechen, so ist immer dieselbe Zeit $\frac{1}{4}\, T = t_1$ erforderlich, damit ψ jedes einzelne Intervall durchläuft.

Die Zunahmen des Winkels Θ sind in den beiden ersten Zeitintervallen (während ψ wächst) gleich gross, desgleichen in den letzten beiden Intervallen. Dasselbe gilt für den Winkel Θ'. Doch sind für Θ die Incremente in den letzten grösser als in den ersten Intervallen, für Θ' umgekehrt.

Die Geschwindigkeit des Punktes m nimmt ab bei wachsendem ψ, nimmt zu bei abnehmendem ψ; für m' gilt das Umgekehrte.

Wenn ferner

$$c - \frac{m'}{A} \sqrt{1 - B} > 0 \text{ und}$$

$$c - \frac{m}{A} \sqrt{1 - B} > 0,$$

so haben beide Punkte stets positive Geschwindigkeit. Wenn aber

$$c - \frac{m'}{A} \sqrt{1 - B} > 0$$

$$c - \frac{m}{A} \sqrt{1 - B} < 0,$$

so hat m stets positive, m' dagegen abwechselnd positive und negative Geschwindigkeit, und zwar negative bei abnehmendem ψ zwischen $2\pi - 2 \arcsin \frac{B}{1 - \frac{A^2 c^2}{m^2}}$ und $\arcsin \frac{B}{1 - \frac{A^2 c^2}{m^2}}$.

Wenn endlich

$$c - \frac{m'}{A} \sqrt{1 - B} < 0$$

$$c - \frac{m}{A} \sqrt{1 - B} < 0,$$

so ändern beide Punkte ihre Bewegungsrichtung, und zwar wenn ψ zunimmt, hat der Punkt m negative Richtung von

$$\psi = 2 \arcsin \frac{B}{1 - \frac{A^2 c^2}{m'^2}} \text{ bis } \psi = 2\pi - 2 \arcsin \frac{B}{1 - \frac{A^2 c^2}{m'^2}},$$

und wenn ψ abnimmt, der Punkt m' von

$$\psi = 2\pi - 2 \arcsin \frac{B}{1 - \frac{A^2 c^2}{m^2}} \text{ bis } \psi = 2 \arcsin \frac{B}{1 - \frac{A^2 c^2}{m^2}}.$$

Der Punkt m ändert also zweimal seine Bewegungsrichtung bei wachsendem ψ (im ersten und im zweiten Zeitintervall), der Punkt m' dagegen zweimal bei abnehmendem ψ (im dritten und vierten Intervall).